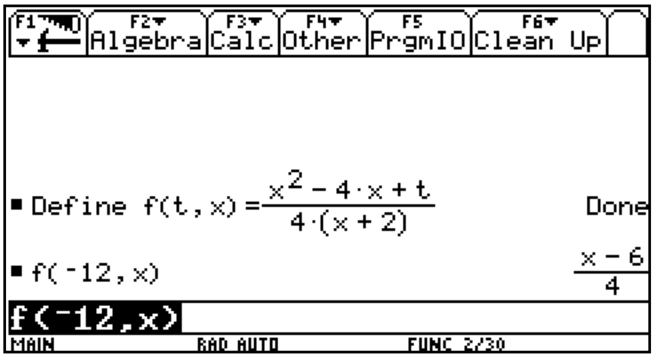
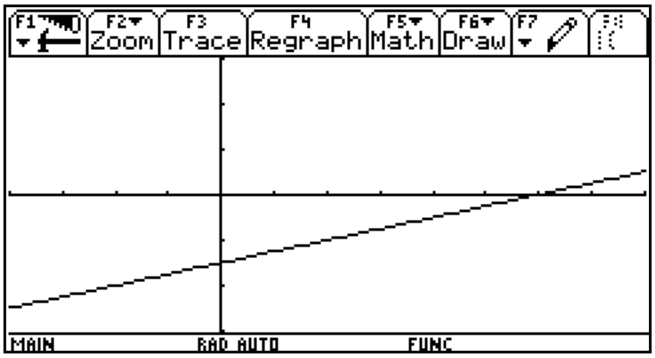
Lösung zur Aufgabe ④:

Gegeben ist die Funktionenschar f(t,x) durch $f(t,x)=\dfrac{x^2-4x+t}{4\cdot(x+2)}$, $x \neq -2$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Welche Kurve ergibt sich für t = –12 ? Bestätigen und erklären Sie ihre Beobachtung anhand einer Rechnung.



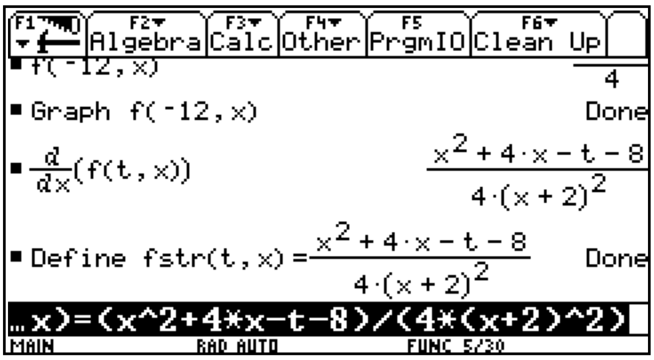


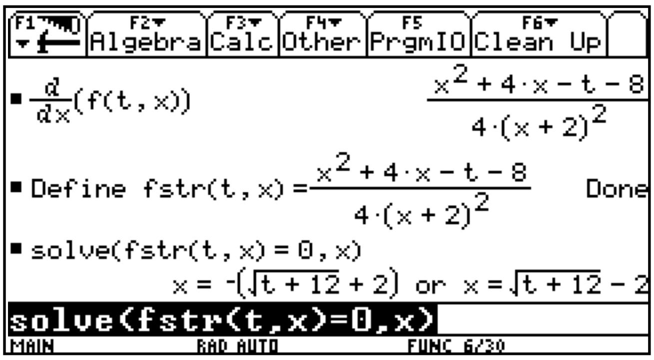
Der TI sagt, dass f(–12,x) eine Gerade ist. das Schaubild scheint diese Aussage zu bestätigen. Wenn wir allerdings in den Funktionsterm für t = –12 einsetzen, erhalten wir:

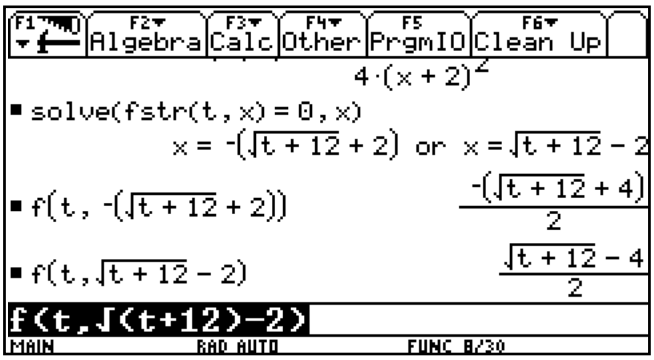
$$f(-12,x)=\frac{x^2-4x-12}{4\cdot(x+2)}$$

Dieser Term ist an der Stelle x = –2 nicht definiert. Aber wegen $x^2 - 4x - 12 = (x - 6)\cdot(x + 2)$ lässt sich der Bruch zum TI-Ergebnis kürzen. Dadurch darf allerdings die Definitionsmenge nicht größer werden.
Das Schaubild von f(–12,x) ist also eine Gerade mit einer Lücke für x = –2.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Kurve, auf der alle Extrempunkte der Schar liegen.







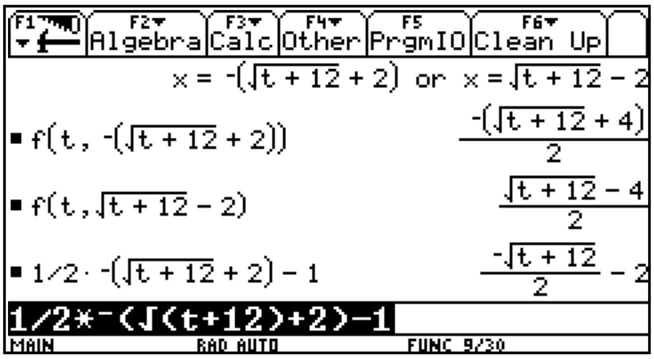
Es gibt nur für t ≥ – 12 Punkte mit waagrechter Tangente. Unter diesen Punkten sind alle Extrempunkte der Schar vertreten.
Wir berechnen die Gleichung der Kurve, auf der alle Punkte mit waagrechter Tangente liegen:

Die Rechnung geht von Hand schneller und einfacher als mit dem Rechner:

$x = \sqrt{t+12} - 2 \Rightarrow \sqrt{t+12} = x + 2$

einsetzen in $y = \dfrac{\sqrt{t+12} - 4}{2}$ führt auf

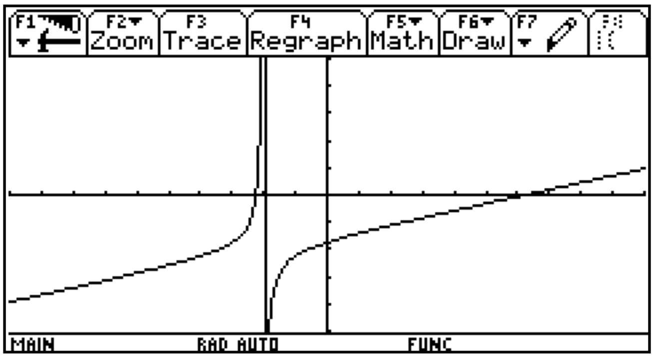
$$y = \tfrac{1}{2}x - 1.$$



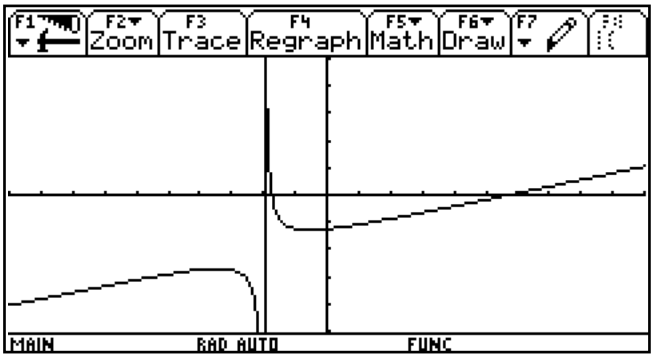
Die Probe mit den anderen Extrempunktkandidaten zeigt, dass auch diese auf der berechneten Geraden liegen.
Daher liegen auch alle Extrempunkte der Schar auf dieser Geraden.

c) Für welche Werte von t erhält man grundsätzlich verschiedene Kurvenverläufe ?
Die bisherigen Ergebnisse legen nahe, dass unterschiedliche Kurvenverläufe vür $t < -12$ (keine lokalen Extrempunkte) und $t > -12$ (genau zwei lokale Extrempunkte) vorliegen. Die Schaubilder bestätigen dies. Die Gerade aus a) „trennt" diese unterschiedlichen Kurven.

für $t = -14$ ergibt sich :

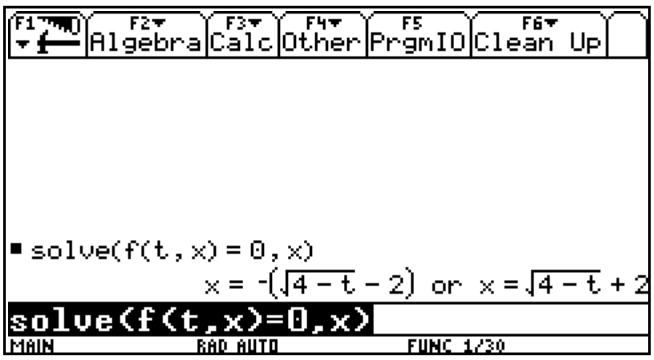


für $t = -10$ ergibt sich:

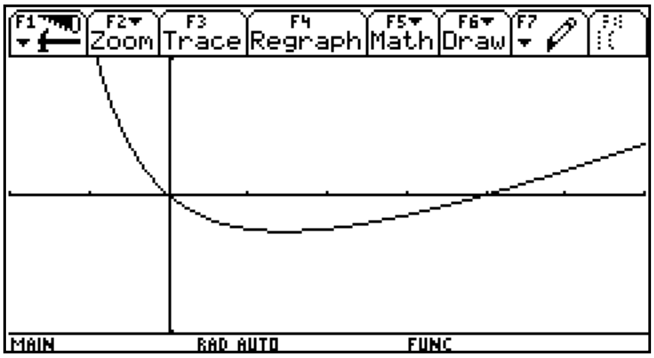


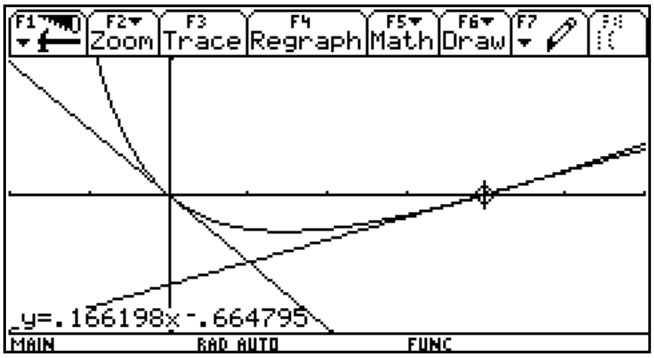
d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Kurvenschar mit der x-Achse.
Die Tangenten in diesen Schnittpunkten bilden mit der x-Achse ein Dreieck, das bei Rotation um die x-Achse einen Doppelkegel erzeugt.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Doppelkegels für $t = 0$.

Es gibt zwei Nullstellen für $t < 4$, eine Nullstelle für $t = 4$ und keine Nullstelle für $t > 4$.
Wir interessieren uns nur für $t = 0$. Dafür sind die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.



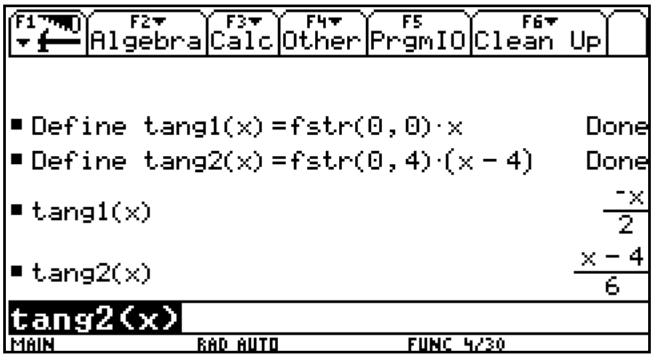
Wir zeichnen das Schaubild von f(0,x) und ergänzen mithilfe des Befehls ***Tangent*** aus dem F5-Menue die beiden Tangenten, um die es geht:

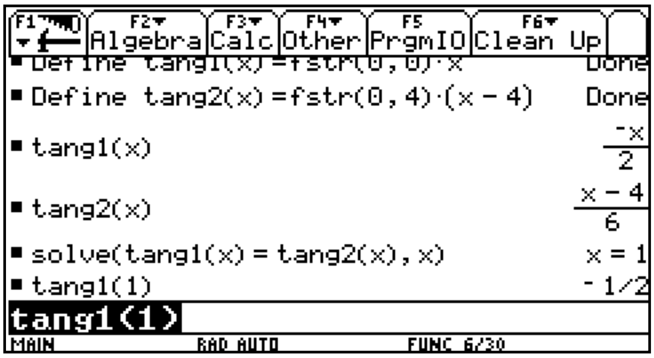




Der Zeichnung entnehmen wir: der Radius des Doppelkegels ist gerade der Betrag des y-Werts des Schnittpunktsa beider Tangenten, seine Höhe ist der Abstand zwischen den beiden Nullstellen, also h = 4.

Die Tangentengleichungen: und der Schnittpunkt der Tangenten:





Das Volumen des entstehenden Doppelkegels ist damit:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot \pi$, gemessen in Raumeinheiten.